

ブラックホール連星系の軌道離心率が 宇宙論的重力波背景輻射の スペクトラムに及ぼす影響

榎 基宏

(国立天文台 天文データセンター)

&

長島 雅裕

(長崎大学 教育学部)

§ 1.Introduction

様々な赤方偏移に存在するコンパクトオブジェクト連星系が放射する重力波(GW)の重ね合わせ

=> 重力波背景輻射 (GWBR)として観測されうる

SMBH-SMBH : $f \sim 10^{-9} - 10^{-6}$ Hz

(e.g. Wyithe & Loeb 2003, Sesana et al. 2004, Enoki et al. 2004)

WD-WD/WD-NS : $f \sim 10^{-5} - 10^{-1}$ Hz

(e.g. Farmer & Phinney 2003)

超大質量ブラックホール(SMBH)連星からのGWBRは pulsar timing で測定できる。

=>e.g. The Parkes Pulsar Timing Array (PPTA) project

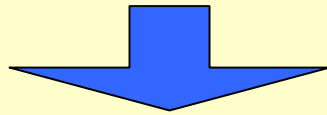
*Eccentricity ?

これまでの、SMBH連星系からのGWBRの研究は、連星の軌道は全て円であると仮定されてきた。

しかし、連星系の軌道は一般には楕円になる。

- evolving SMBH binary due to dynamical friction (e.g. Fukushige et al. 1992, Zier 2006)
- SMBH - IMBH (Matsubayashi et al. 2005)
- SMBH binary + SMBH (Iwasawa et al. 2006)
- SMBH binary + gas disk (e.g. Armitage & Natarajan 2005)

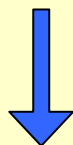
楕円軌道の連星は、軌道周波数の整数倍の周波数を持つ高調波の重力波を放射する。



重力波放射のSpectral energy distribution (SED), や power、timescale が、軌道長半径が同じ連星であっても、軌道が円と楕円の場合で異なる。

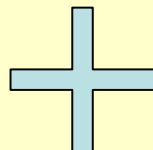
本研究では、

**Semi-analytic model of
galaxy formation + SMBH formation (SA-model)**

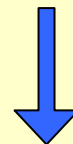


(Nagashima et al 2001,
Enoki et al 2003)

SMBH coalescence rate



GW SED from a eccentric binary



楕円軌道のSMBH連星系からのGWBRのスペクトラム
を解析した。

§ 2. Gravitational Wave from a Binary (Peters & Mathews 1963)

軌道周波数 f_p 、離心率 e でケプラー回転する連星系が放射する重力波の total power:

$$L_{\text{GW}}(M_1, M_2, f_p, e) = L_{\text{GW,circ}}(M_1, M_2, f_p)F(e),$$

ただし、

$$\begin{aligned} L_{\text{GW,circ}}(M_1, M_2, f_p) &= \frac{32}{5} \frac{G^{7/3}}{c^5} M_{\text{chirp}}^{10/3} (2\pi f_p)^{10/3} \\ &= 4.7 \times 10^{48} \left(\frac{M_{\text{chirp}}}{10^8 M_\odot} \right)^{10/3} \left(\frac{2f_p}{10^{-7} \text{ Hz}} \right)^{10/3} \text{ erg} \end{aligned}$$

$$M_{\text{chirp}} \equiv [M_1 M_2 (M_1 + M_2)^{-1/3}]^{3/5}$$

↑ 軌道が円である連星系が放射するGWの total power

$$F(e) \equiv \frac{1 + 73e^2/24 + 37e^4/96}{(1 - e^2)^{7/2}}$$

*GW SED from a binary on eccentric orbit

楕円軌道の連星系は、軌道周波数の n 倍の周波数 ($f_r = n f_p$) の高調波を放射する: $L_{\text{GW,circ}}(M_1, M_2, f_p) g(n, e)$

$g(n, e)$ は、高調波の各モードに分配させるエネルギー発生率の分配関数。

$$g(n, e) \equiv \frac{n^4}{32} \left\{ \left[J_{n-2}(ne) - 2eJ_{n-1}(ne) + \frac{2}{n}J_n(ne) + 2eJ_{n+1}(ne) - J_{n+2}(ne) \right]^2 + (1 - e^2) [J_{n-2}(ne) - 2eJ_n(ne) + J_{n+2}(ne)]^2 + \frac{4}{3n^2} [J_n(ne)]^2 \right\} \quad (2)$$

J_n は n th order Bessel function.

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} g(n, e) = F(e).$$

The SED of GW:

$$L_{f_r}(e, t_p) = L_{\text{GW,circ}}(f_p) \sum_{n=1}^{\infty} g(n, e) \delta(f_r - n f_p).$$

*The timescale of GW from an eccentric binary

GW放射のtime scale:

$$\tau_{\text{GW}} \equiv f_p \frac{dt_p}{df_p}.$$

The timescale emitting GW of a binary on eccentric orbit:

$$\tau_{\text{GW}}(M_1, M_2, f_p, e) = \frac{\tau_{\text{GW,circ}}(M_1, M_2, f_p)}{F(e)}$$

where

$$\begin{aligned} \tau_{\text{GW,circ}}(M_1, M_2, f_p) &= \frac{5}{96} \left(\frac{c^3}{GM_{\text{chirp}}} \right)^{5/3} (2\pi f_p)^{-8/3} \\ &= 1.2 \times 10^4 \left(\frac{M_{\text{chirp}}}{10^8 M_{\odot}} \right)^{-5/3} \left(\frac{2f_p}{10^{-7} \text{ Hz}} \right)^{-8/3} \text{ yr.} \end{aligned}$$

The timescale emitting GW of a binary on a circular orbit

§ 3. GWBG from binaries on eccentric orbits

現在のGWBRのエネルギー密度:

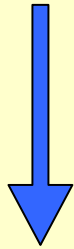
$$\begin{aligned}\rho_{\text{GW}} c^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty n_c(z) \frac{1}{1+z} \frac{dE_{\text{GW}}}{df_r} df_r dz \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty n_c(z) \frac{1}{1+z} f_r \frac{dE_{\text{GW}}}{df_r} dz \frac{df}{f}.\end{aligned}$$

$n(z)$: GW源の個数密度

E_{GW} : the energy emitted in GW from a source

f_r : the GW frequency in the rest frame

f : the observed GW frequency



$$\rho_{\text{GW}} c^2 \equiv \int_0^\infty \frac{\pi c^2}{4 G} f^2 h_c^2(f) \frac{df}{f},$$

The characteristic amplitude of GWBG spectrum (Phinney 2001):

$$h_c^2(f) = \frac{4G}{\pi c^2 f} \int_0^\infty n_c(z) \left(\frac{dE_{\text{GW}}}{df_r} \right) \Big|_{f_r=f(1+z)} dz.$$

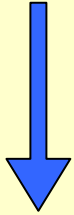
=>連星の場合

$$h_c^2(f) = \frac{4G}{\pi c^2 f} \int dM_1 dM_2 dz n_c(M_1, M_2, z) \left(\frac{dE_{\text{GW}}(M_1, M_2)}{df_r} \right) \Big|_{f_r=f(1+z)}$$

$n(M_1, M_2, z)$: 連星系の個数密度

*The power spectrum of GWBG from binaries on eccentric orbits

$$h_c^2(f) = \frac{4G}{\pi c^2 f} \int dM_1 dM_2 dz n_c(M_1, M_2, z) \left(\frac{dE_{\text{GW}}(M_1, M_2)}{df_r} \right) \Big|_{f_r=f(1+z)}$$



$$\frac{dE_{\text{GW}}}{df_r} = \int_0^{t_{\text{life}}} L_{f_r}(t_p) dt_p$$

The SED of GW:

$$L_{f_r}(e, t_p) = L_{\text{GW,circ}}(f_p) \sum_{n=1}^{\infty} g(n, e) \delta(f_r - n f_p)$$

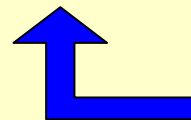


The power spectrum of GWBR from binaries on circular orbits:

$$h_c^2(f) = \frac{4\pi c^3}{3} \int dM_1 dM_2 dz n(M_1, M_2, z) (1+z)^{-1/3} \left(\frac{GM_{\text{chirp}}}{c^3} \right)^{5/3} (\pi f)^{-4/3} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} \right)^{2/3} \frac{g(n, e)}{F(e)}$$

注意！ 離心率, e , は観測される GW の周波数 f の関数

$$e = e(f_p/f_{p,0}, e_0) = e(f_r/nf_{p,0}, e_0) = e[f(1+z)/nf_{p,0}, e_0]$$



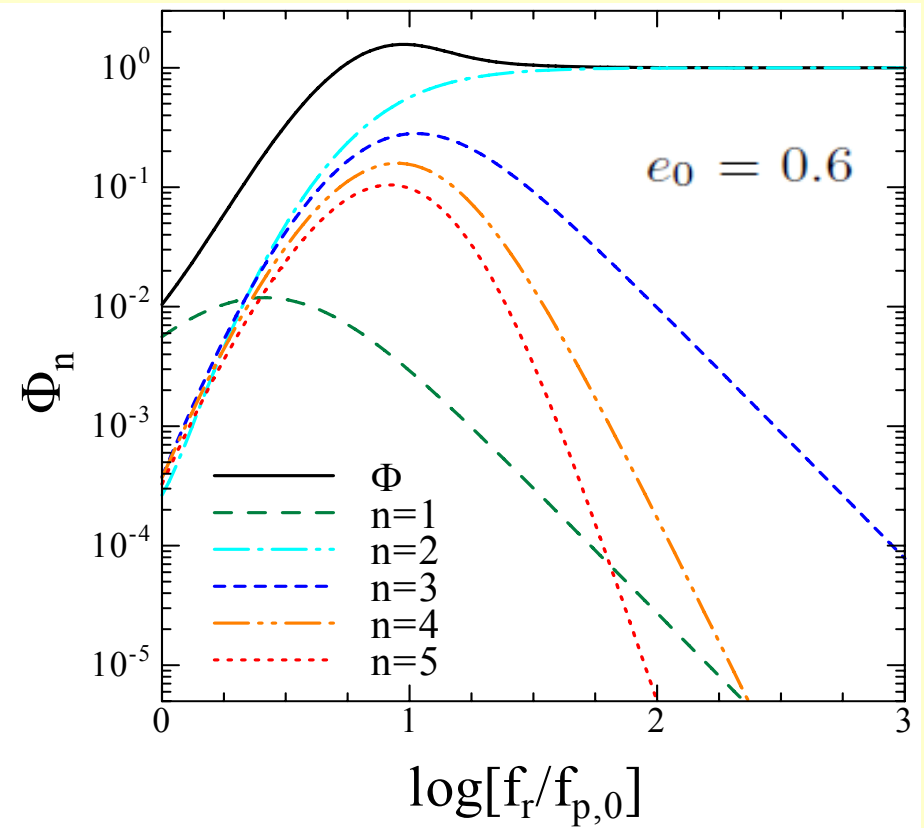
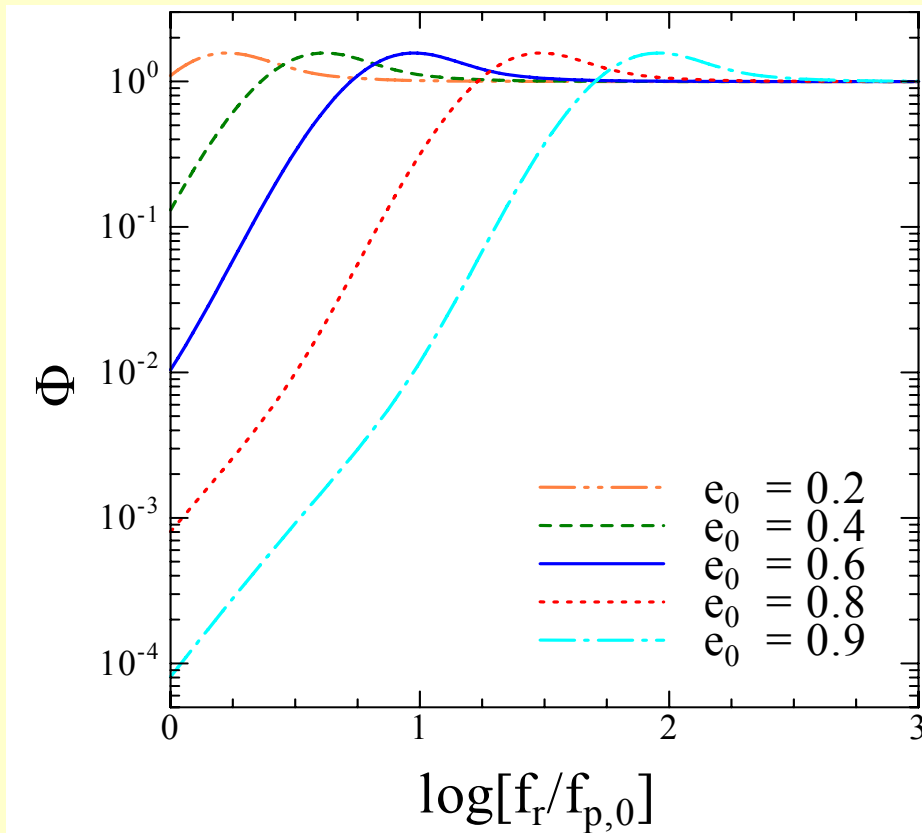
$$\frac{f_p}{f_{p,0}} = \left\{ \frac{1 - e_0^2}{1 - e^2} \left(\frac{e}{e_0} \right)^{\frac{12}{19}} \left[\frac{1 + \frac{121}{304} e^2}{1 + \frac{121}{304} e_0^2} \right]^{\frac{870}{2299}} \right\}^{-3/2}$$

*Effects of eccentricity on GWBG

離心率の影響の強さ:

$$\Phi \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n,$$

$$\Phi_n \equiv \left(\frac{2}{n}\right)^{2/3} \frac{g(n, e)}{F(e)}.$$



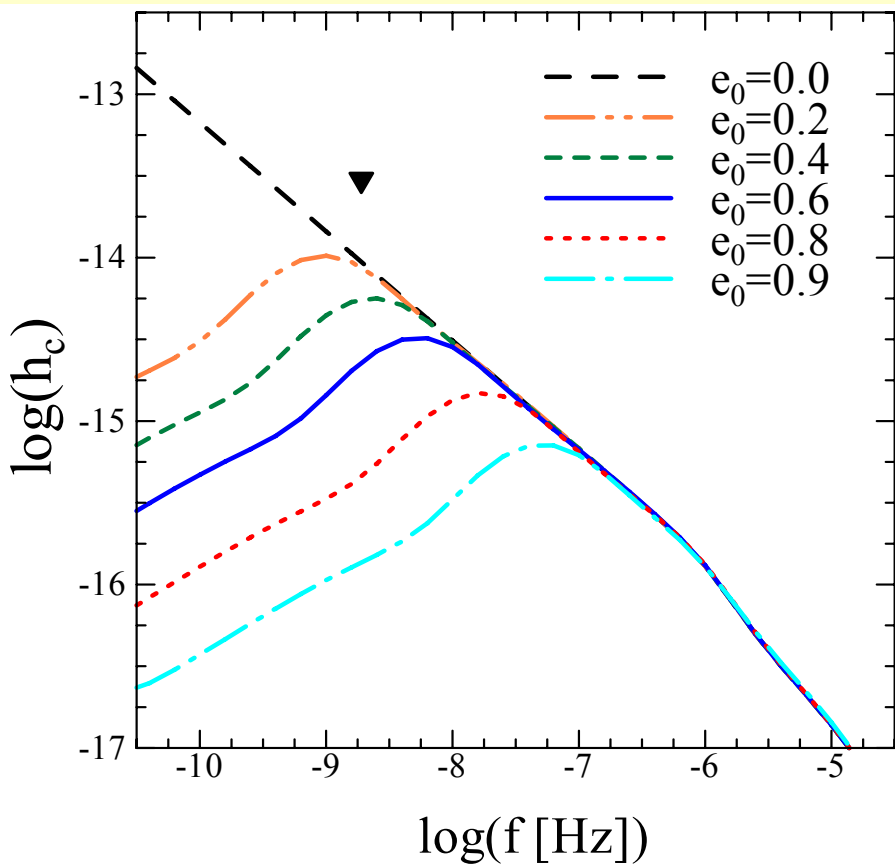
低周波数側 \Rightarrow スペクトラムの振幅は小さくなる
高周波数側 \Rightarrow スペクトラムの振幅は大きくなる

§ 4. Power spectrum of the GWBR from SMBH binaries

SMBH 連星系の個数密度を求めるために

semi-analytic model of galaxy + SMBH formation (Enoki et al. 2003)

を使う。



$f_p/f_{p, \max} = 10^{-3}$ ($a = 300R_S$)での離心率を初期値, e_0 , とする。

楕円軌道であると高調波を出すので、 $f \sim 1n - 1m\text{Hz}$ で、パワースペクトラムは、小さくなる。

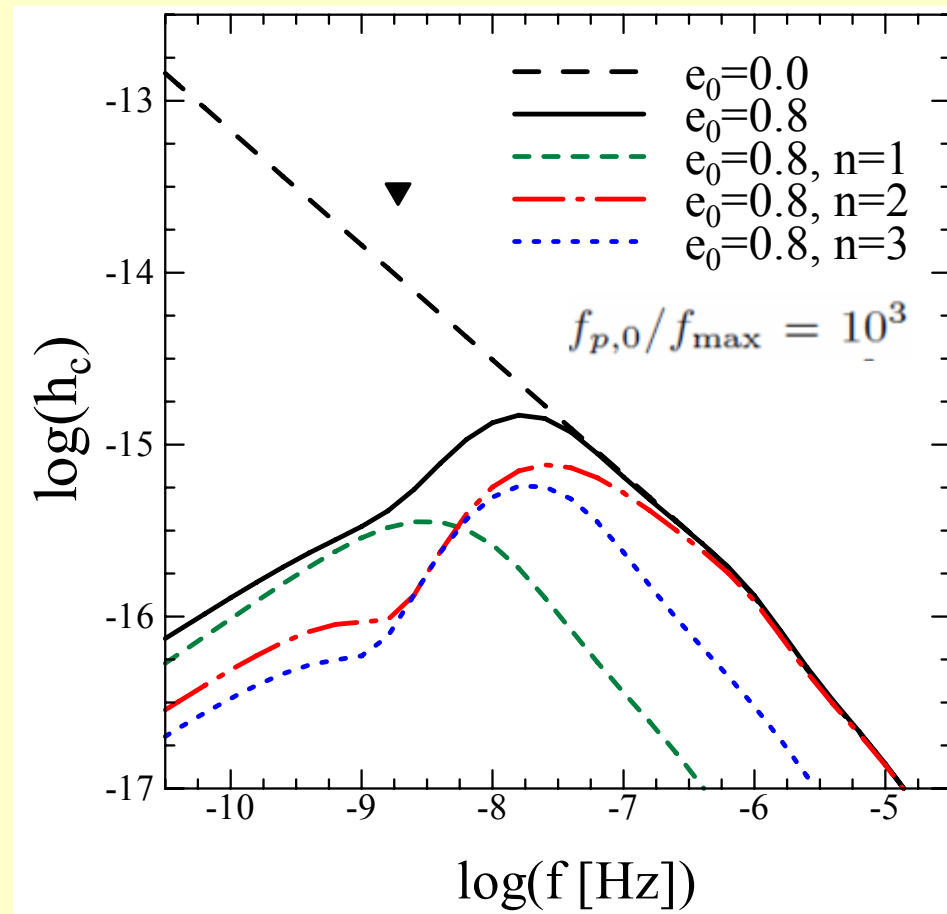
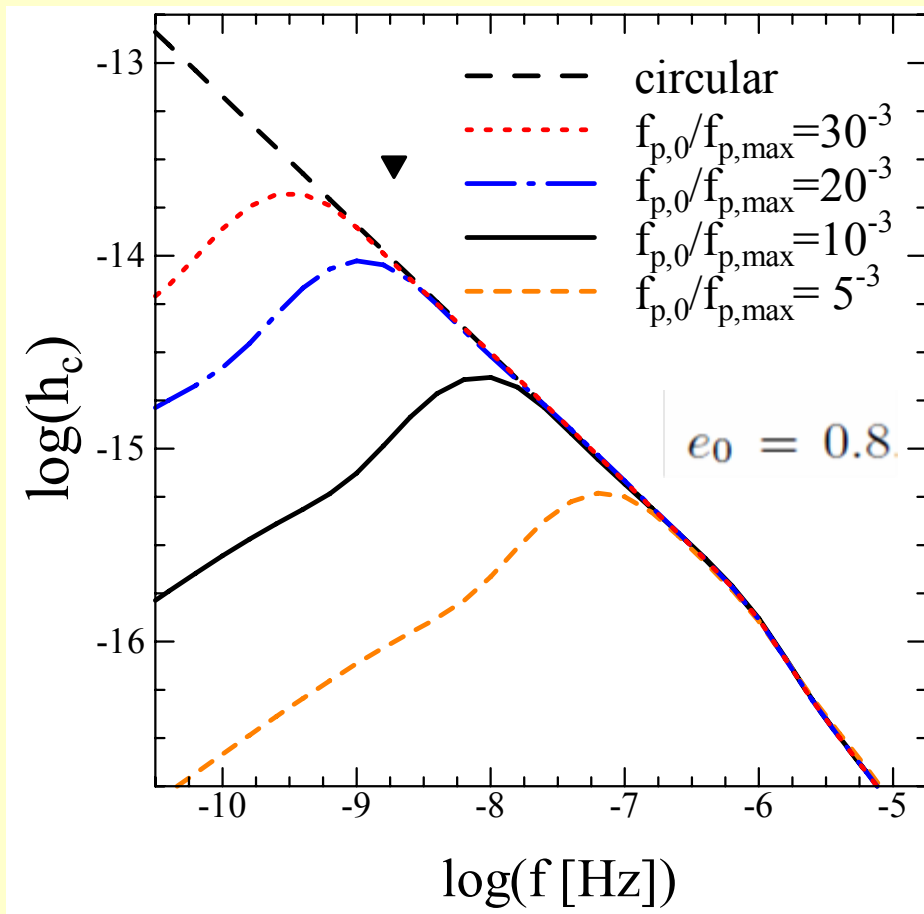
$f \sim 1 \mu\text{Hz}$ 付近でスペクトラムの傾きが変わるのは、BHの大きさに対応する、GWを放射できる上限値があるため。:

$$f_{p, \max} \sim 5 \times 10^{-5} (M_{\text{BH}}/10^8 M_{\text{sun}})^{-1} \text{ Hz} \\ [3 \times R_S \text{ (Schwarzschild radius) }]$$

▼ : the current limit from pulsar timing measurements.

(Lommen 2002)

*GWBG spectrum from eccentric SMBH binaries



$$a = 0.5 \times 10^{-2} \times (M / 10^8 M_{sun})^{1/3} (f_p / 10^{-8} \text{ Hz})^{-2/3} \text{ pc}$$

$$10^4 R_S \sim 0.1 (M_{BH} / 10^8 M_{sun}) \text{ pc}$$

*Effects of galaxy formation processes on SMBHs

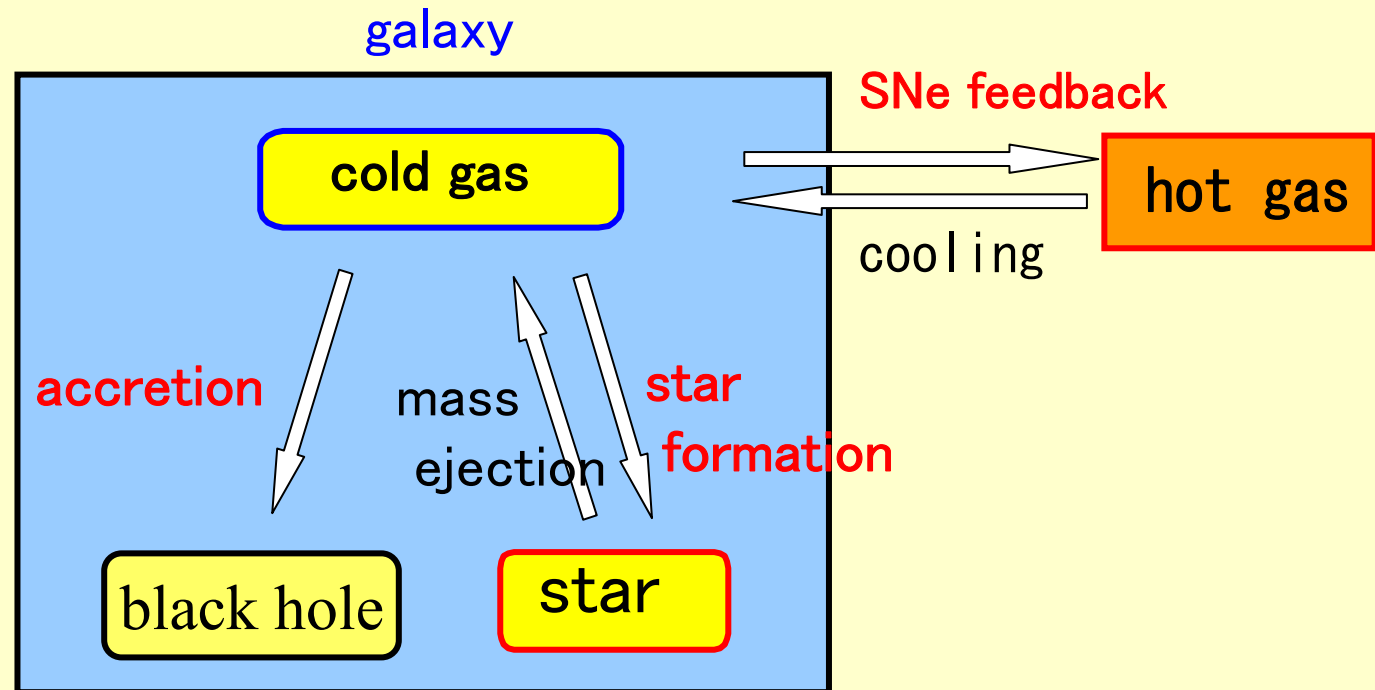
SMBHが成長する主要因は、星の材料でもある cold gasが降着である。

*Star Formation

cold gas => star

*SNe feedback

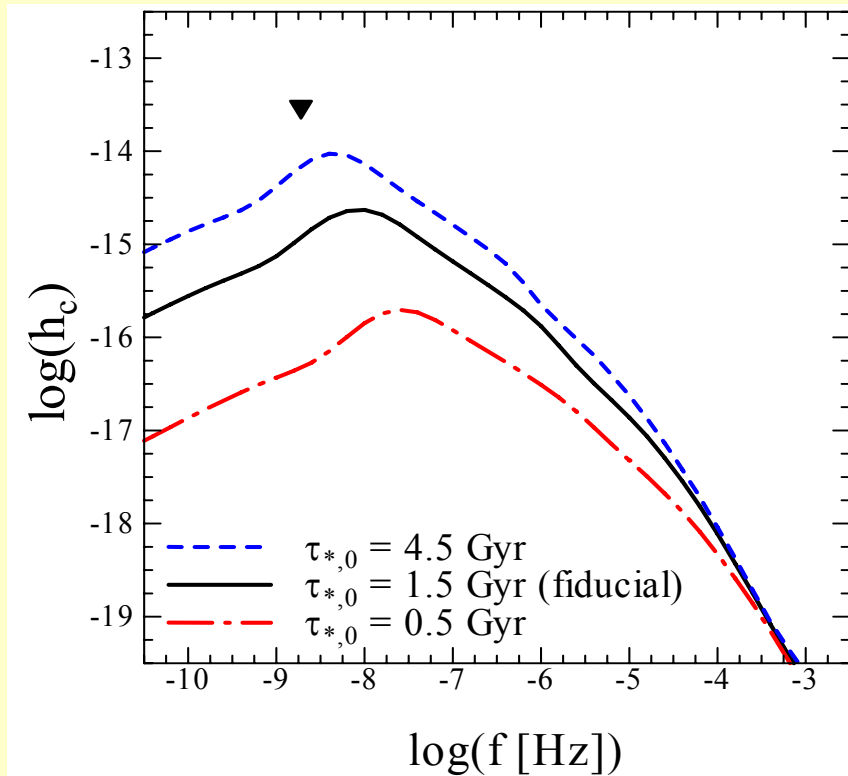
cold gas => hot gas



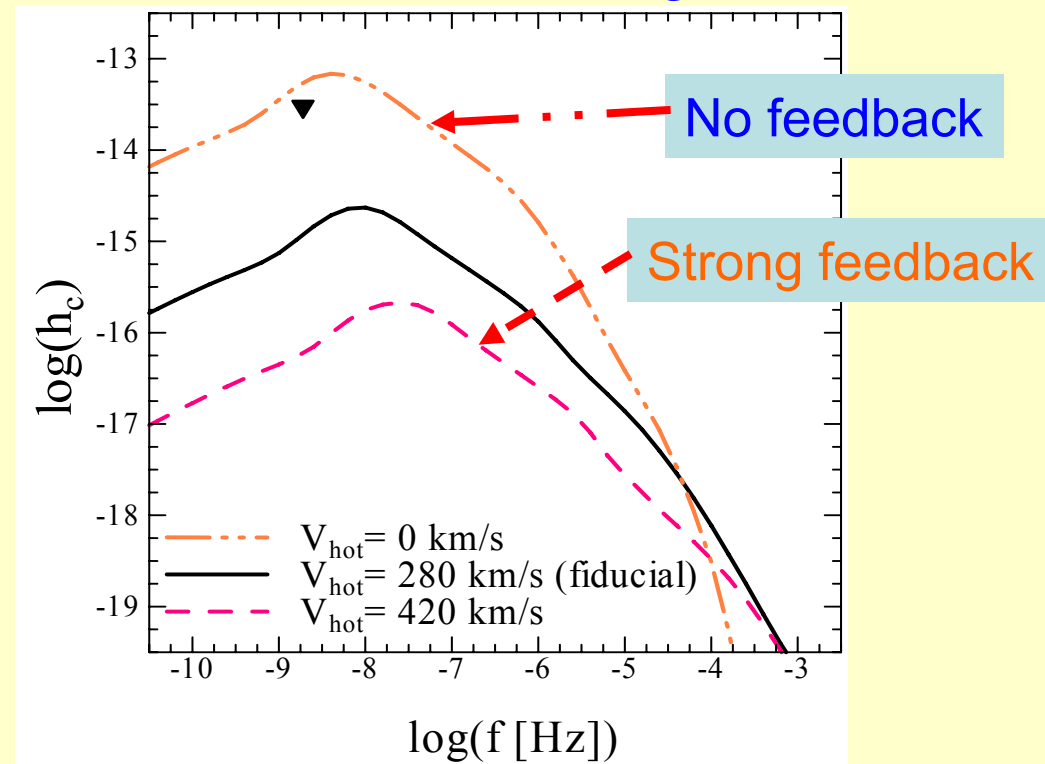
*Effects of galaxy formation processes on the GWBR

SMBHが成長する主要因は、星の材料でもある cold gasが降着である。
=> Star formation & SNe feedback がSMBH連星からのGWBR
のスペクトラムに大きな影響を与える。

Star formation time-scale:



SNe feedback strength:

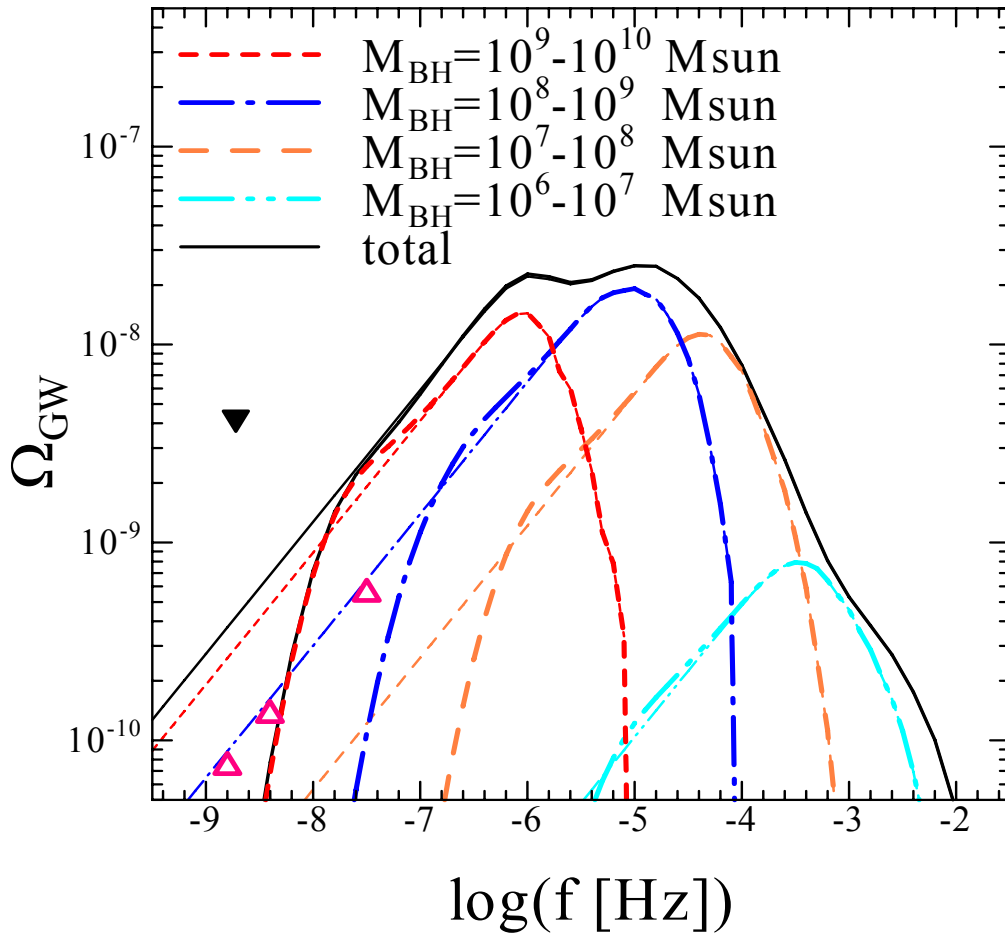


$$e_0 = 0.8 \text{ and } f_{p,0}/f_{p,\text{max}} = 10^{-3}.$$

*GWBG energy density from SMBH binaries

power spectrum => energy density

$$\Omega_{\text{GW}}(f) = \frac{2\pi^2}{3H_0^2} f^2 h_c^2(f)$$



△ : $h_c \propto f^{-2/3}$ [$e_0=0$: circular orbits]を仮定した場合のPPTAのfull data-setで到達できる感度。(Jenet et al. 2006)

PPTA のfull data-set なら SMBH連星の離心率について制限を加えることができる。

▼ : the current limit from pulsar timing measurements (Lommen 2002).

Thin lines: for $e_0=0$ (circular orbits).

Thick lines: for $e_0 = 0.8$, $f_{p,0}/f_{\text{max}} = 1/10^3$

$$f_{\text{max}} \propto 1/M_{\text{BH}}$$

§ 5. Summary

- GWを出す連星系が楕円軌道であると、それらの重ねあわせである背景輻射がどうなるかを解析した。
- SA-model for galaxy + SMBH formationを用いて、楕円軌道にあるSMBH連星系が出すGWの背景輻射のパワースペクトラムを計算した。

=> SMBH連星系が楕円軌道をなす場合は、高調波の重力波を出すために、離心率が $a = 300 R_S$ で、 $e_0 > 0.2$ ならば $f < 1$ nHz の低周波数側の GWBRのパワースペクトラムが、円軌道の場合に比べて小さくなる。

- 初期離心率の分布関数を求めることが重要。
- SMBH連星系からのGWBRのパワースペクトラムの全体的な形や、振幅は銀河形成過程に大いに依存する。
- PPTA project のようなpulsar timing 測定は SMBH binaries 合体率だけでなく、SMBHの離心率についても制限を与えることができる。